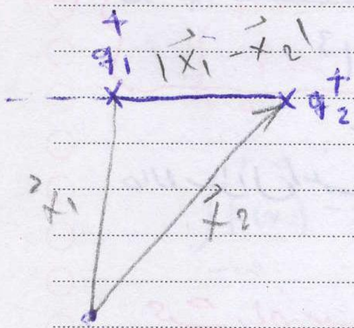
جلسه اول ۱۰ مهرماه ۱۳۸۴ یکشنبه

الکترواستاتیک (ماکروسکوپی) :

قانون کولن : نیروی بین دو بار نقطه‌ای در قوانین زیر صدق می‌کند

قانون، یعنی اثبات ندارد، طبق شواهد تجربی درست است. (اصل موضوع در ریاضی)

نقطه‌ای: در مقایسه با ابعاد بقیه کمیت‌های مسئله بسیار کوچک. (ابعاد هر کدام در مقایسه با فاصله باید بسیار کوچک باشد.)



۱- با حاصلضرب q_1 و q_2 متناسب است --- $F \equiv q_1 q_2$

۲- نسبت عکس با فاصله به توان ۲ دارد. $F \equiv \frac{1}{R^2}$

۳- نیرو در امتداد خط واصل است.

۴- جاذبه اگر مختلف العلامه باشند و دافعه اگر هم علامت باشند.

۵- نیرو در اصل برهم‌نهی صدق می‌کند.

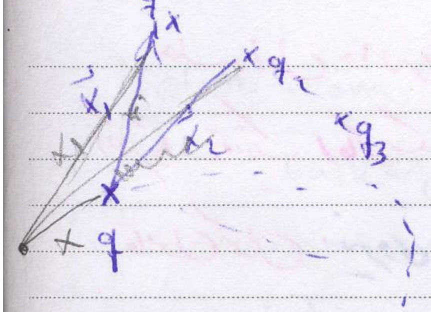
$$\vec{F}_{q_1} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \cdot \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

برای برداری شدن در دایره ضرب

k در دستگاه گاوسی $= 1$

$$\vec{F}_{q_1} = \frac{q_1 q_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|x_1 - x_2|^3}$$

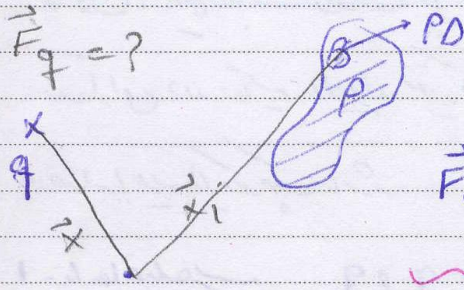
قانون کولن تا جمله چهارم



$$\vec F_q = \sum_i \frac{q q_i (\vec x - \vec x_i)}{|x - x_i|^3} \quad (\mathrm{I})$$

قانون کولن بر اساس جمع جمله گفته شده

حالا اگر توزیع پیوسته بار داشته باشیم:



جمع است [illegible] شد

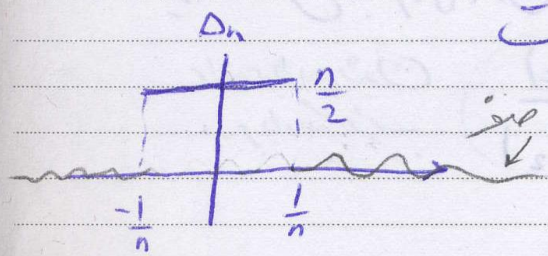
$$\vec F_q = q \int \frac{\rho(x')(\vec x - \vec x')}{|x - x'|^3} d^3x' \quad (\mathrm{II})$$

حالا سوال این است که چگونه از رابطه II به رابطه I برسیم:

بحث ریاضی مسئله:

تابع دلتای دیراک: یک بعدی

ابتدا تابع Δ_n را معرفی می‌کنیم که به شکل روبرو است



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n \, dx = 1$$

$$\Delta_n = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{n} \text{ و } x > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n = \delta(x)$$ تابع دلتای دیراک

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \neq 0 & x = 0 \end{cases}$$ یعنی حتماً $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$

1) $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(x)\, dx = 0$ 2) $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$

$\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \quad ?$$

اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx$$

$$f(x) = f(0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\, \delta(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} x\, \delta(x)\, dx + \cdots = f(0)$$

عدد ثابت دیرون (۱) حاصلضرب همیشه صفر $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \delta(x)\, dx$

سؤال: چرا $0! = 1$ است؟ تعریف تکوینی

$$(n-1)! = \frac{n!}{n} \qquad 0! = \frac{1!}{1} = 1$$

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \neq 0 & x = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a)$$

دلتای دیراک سه بعدی :

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)$$

$$\int_{\text{تمام فضا}} f(\vec{x})\, \delta(\vec{x})\, d\vec{x} = f(0)$$

$$\delta(\vec{x}-\vec{a}) = ? \qquad \int_{\text{تمام فضا}} f(\vec{x})\, \delta(\vec{x}-\vec{a})\, d\vec{x} = f(\vec{a})$$

حالا به سراغ مسأله اصلی می‌رویم و از رابطه (III) به (I) می‌خواهیم برسیم . از II

به رابطه زیر می‌رسیم

$$\vec{F}_q = \frac{q q_1 (\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3}$$

باید یک ρ داشته باشیم تا انتگرال بگیریم . ρ باید خاصیت‌های زیر را داشته باشد :

$$\rho : \begin{cases} \int \rho(\vec{x})\, d^3x = q_1 \\ 0 & \vec{x} \neq \vec{x}_1 \\ \neq 0 & \vec{x} = \vec{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \rho(\vec{x}) = q_1\, \delta(\vec{x}-\vec{x}_1)$$

حالا ρ را جایگزین می‌کنیم:

$$\vec{F}_q = q\int q_1\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}_1)\,\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\,d^3x' = q q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

برای رسیدن از (I به II)، ρ باید بصورت زیر باشد

$$\rho(\vec{x}') = \sum_i q_i\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)$$

از جمع به نقطه‌ای دلتای سه بعدی

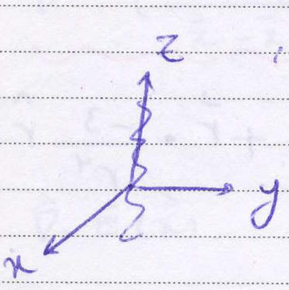
جمع به طولی دلتای دو بعدی

پس به طور کلی باید از انتگرال استفاده کرد و از تابع دلتای دیراک. پس قانون کولن را بطور زیر است:

$$\vec{F} = q\int_{\text{تمام فضا}} \rho(x')\,\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\,d^3x'$$

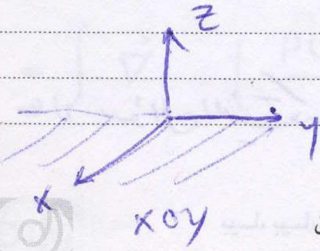
برای توزیع بارهای حجمی، سطحی، نقطه‌ای
مشروط به استفاده صحیح از تابع دلتای دیراک

یک توزیع طولی بار داریم در امتداد محور z: یک ρ بنویسید،



$$\rho = c\,\delta(x)\,\delta(y)$$

در هر جای غیر از محور z باید صفر باشد $\delta(y)\,\delta(x)$



چون ρ در هر نقطه‌ای غیر از صفحه xoy باید صفر باشد. $\rho = c\,\delta(z)$

میدان الکتریکی، نیروی وارد بر واحد بار مثبت

$$\vec{E}(x) = \frac{\vec{F}_q}{q}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x})\,(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3}\, d^3x'$$

حالا باید $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = ?$ و $\vec{\nabla}\times\vec{E} = ?$ را محاسبه کنیم

بحث ریاضی برای محاسبه $\vec{\nabla}\times$ و $\vec{\nabla}\cdot$

$\vec{r}$ را در نظر بگیرید

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$r = |\vec{r}|$ $\quad f = \frac{1}{r}$ تعریف می‌کنیم

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{|r|^3}$$

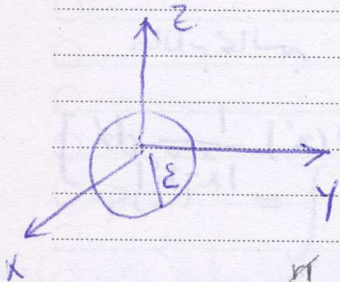
$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr}\cdot\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\left\{\frac{3}{r^3} + \vec{r}\cdot\frac{-3}{r^4}\hat{r}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right\} = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq 0 \\ \text{مبهم} & r = 0 \end{cases}$$

حالا سؤال اینکه $\frac{0}{0}$ چقدر است ؟

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \overset{?}{=} c\,\delta(\vec{r})$$



$$\int \vec{\nabla}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right) dv = c\int \delta(r)\,dv$$

$$\oint \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{s} = c$$

[illegible]

$$\oint \frac{-\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{r}\,\varepsilon^2\, d\Omega = c \quad\Rightarrow\quad c = 4\pi$$

$r^2 \to \varepsilon^2$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta(r)$$

Never forget!

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = 4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

همیشه در ذهن داشته باشید.

حالا بحث اصلی ما ادامه دهیم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{نسبت به } x}\cdot\int\frac{\rho(x')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3x'$$

$$= \int\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\rho(x')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]d^3x' = 4\pi\int\rho(x')\,\delta(x-x')\,d^3x'$$

$$= 4\pi\,\rho(x)$$

میدان حالت واگرایی دارد. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$

حالا به محاسبه $\vec{\nabla}\times$ می‌رسیم:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3x' = \vec{\nabla}\left[-\int \rho(x') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} dx'\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left[-\int \rho(x') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} dx'\right] = 0$$

چرخش یا تاو
میدان الکتریکی

میدان الکتریکی هیچ تاو یا چرخش ندارد.

جلسه دوم شنبه ۱۷ مهرماه ۱۳۸۴

از قبل داشتیم

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}) = \int \dfrac{\rho(\vec{x}')\,(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{x}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{cases}$$

هرگاه میدانی داشته باشیم با حاصل ($\nabla\times$) صفر،
آن میدان کنسرواتیو (پایستار) است

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

که هر سه تعریف میدان کنسرواتیو است.
از هر کدام می‌توان به دیگری رسید مثلاً:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\oint \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r} = -\oint d\varphi = 0$$

پتانسیل الکتریکی که یک اسکالر است بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')\, d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

در واقع $\vec{E}(\vec{x})$ یک کمیت فیزیکی است اما $\varphi(\vec{x})$ یک کمیت فیزیکی نیست. در فیزیک اختلاف پتانسیل داریم نه پتانسیل.

قانون گاوس: قانون است و به اثبات نیاز ندارد.

$$\oint_{s} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi q_{in}$$ قانون گاوس انتگرالی

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = 4\pi \int \rho\, dV \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - 4\pi\rho)\, dV = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$ قانون گاوس دیفرانسیلی

در حالت قبل از قانون کولن به گاوس رسیدیم. اما اکنون اصل را قانون گاوس می‌گیریم و قانون کولن را بدست می‌آوریم تا نشان دهیم که این دو معادلند، یعنی با ایراد رابطه $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ باید به رابطه $\vec{E}(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$ برسیم.

برای بدست آوردن این رابطه از قضیه هلمهولتز استفاده می‌کنیم، اگر $\nabla\times$ و $\nabla\cdot$ یک

یک بردار را داشته باشیم می‌توانیم بردار را بدست آوریم

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(r) \longrightarrow$ معلوم

$\vec{\nabla}\times V(\vec{r}) \longrightarrow$ معلوم

$V = ?$

تجزیه هلمهولتز

$$\vec{V}(r) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{V}'(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{\nabla}'\times V'(\vec{r}')\,d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

وقتی می‌گوییم قانون کولن یعنی $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ معلوم است.

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\rho(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' + \cdots$$

$$4\pi\;\frac{x-x'}{|x-x'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \int\frac{\rho(x')\,(x-x')\,d^3x'}{|x-x'|^3} + \cdots$$

در صورتی از قانون گوس به کولن می‌رسیم که شرط $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ را داشته باشیم یعنی میدانهای غیر رادیویی (؟) را کنار بگذاریم. از این به بعد از بین قانون گوس و کولن، قانون گوس را انتخاب می‌کنیم چون تمام میدانهای... را در بر می‌گیرد.

پس از این به بعد از $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ (قانون گوس) استفاده می‌کنیم.

۱- یک دسته مسائل وجود دارد که در آن توزیع بار ρ داده شده بدون شرایط مرزی

وقتی می‌خواهیم $\vec{E}(\vec{x})$ را بدست آوریم. در این موارد φ را بدست می‌آوریم سپس $\vec{\nabla}\varphi$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$$

۲- دسته دوم مسائلی اند که آنها شرایط مرزی بیان شده و توزیع بار نداریم در این‌گونه مسائل بصورت زیر عمل می‌کنیم:

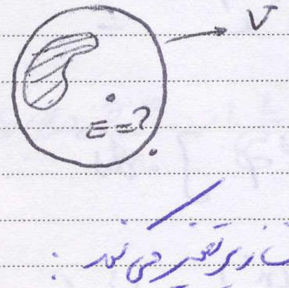
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases} \Rightarrow \nabla^2\varphi = -4\pi\rho$$ معادله پواسون

در اکثر موارد باید معادله لاپلاس را حل کرد $\nabla^2\varphi = 0$

(توزیع بار نداریم، شرایط مرزی داریم.)

۳- دسته سوم مسائلی هستند که هم توزیع بار داریم، هم شرایط مرزی که باید معادله پواسون حل شود.

مثال: درون کره‌ای توزیع باری بصورت زیر داریم.



اگر مرزها در بی‌نهایت نباشند $\varphi = \int \frac{\rho(x')}{|x-x'|}dx'$ بصورت زیر تغییر می‌کند:

قضیه گرین: اگر دو تابع اسکالر مثل φ و ψ داشته باشیم رابطه بصورت زیر برقرار است:

φ و ψ تابع (x)

$$\int_V (\varphi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \varphi)\, d^3x' = \oint_S (\varphi \vec{\nabla}' \psi - \psi \vec{\nabla}' \varphi)\cdot d\vec{s}'$$

φ و ψ هر تابع اختیاری اسکالر هستند. φ را پتانسیل می‌گیریم و ψ را بصورت $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ در نظر می‌گیریم.

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

اگر نسبت به x' هم مشتق بگیریم تفاوتی نمی‌کند: $\vec{\nabla}'^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

" " " x' مشتق بگیریم یک منفی اضافه می‌شود: $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

با جایگذاری φ و ψ خواهیم داشت:

$$\oint_V \left[-\varphi(\vec{x}')\,4\pi\,\delta|\vec{x}-\vec{x}'| + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,4\pi\rho\right] d^3x' =$$

$$\oint_S \left[\varphi(x')\,\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\vec{\nabla}'\varphi\right]\cdot d\vec{s}$$

در $-\frac{1}{4\pi}$ ضرب $\Rightarrow -4\pi\varphi(\vec{x}) + 4\pi\int \frac{\rho(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$

$$\varphi(\vec{x}') = \underbrace{\int \frac{\rho(x')\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint\left[\varphi(x')\,\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\cdot d\vec{s}'}_{(II)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint\left[\frac{\nabla'\varphi}{|x-x'|}\right]\cdot d\vec{s}'}_{(III)}$$

نتیجه قضیه گرین

در جمله آخر جای $d\vec{s}'$ می‌نویسیم $n'da'$ با توجه به اینکه

$$\vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

تغییرات φ در جهت n (مشتق جهت‌دار)

$$\varphi(\vec{x}) = \underbrace{\int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,da'}_{(III)} - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(x')\frac{\partial}{\partial n'}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]da'}_{(II)} \quad (1)$$

(فرمول اصلی پیدا کردن پتانسیل. یک معادله انتگرالی)

چه معادله دیفرانسیلی معادل با این معادله انتگرالی است؟ برای حل یک معادله انتگرالی باید آنرا تبدیل به یک معادله دیفرانسیلی کنیم.

اگر فرض داشته باشیم (II) و (III) در بی‌نهایت صفر می‌شوند زیرا چگالی سطحی بار $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ در بی‌نهایت صفر است. و همچنین $\varphi(x')$ (پتانسیل) هم در بی‌نهایت صفر می‌شود.

جلسه سوم یکشنبه ۱۸ مهرماه ۱۳۸۴

از یک طرف φ از رابطه (1) صدق می‌کند بدست می‌آید و از طرف دیگر φ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$$

شرایط مرزی

در نهایت باید رابطه‌ای بدست آوریم که هم توزیع بار و هم شرایط مرزی را توأمان در بر داشته باشد.

قضیه زیر را داریم:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$$

شرط مرزی مناسب $\longrightarrow$ جواب منحصر بفرد

ابتدا شرایط مرزی مناسب را تعریف می‌کنیم:

۱- پتانسیل روی مرز مشخص باشد.

۲- مشتق عمودی پتانسیل روی مرز مشخص باشد. (یعنی مؤلفه عمودی میدان که همان چگالی بار سطحی است)

۳- روی قسمتی از مرز (1) و روی قسمتی دیگر (2) مشخص باشد. (شرط مرزی مرکب)

حالا می‌خواهیم اثبات کنیم که معادله پواسون با شرط مرزی مناسب، جواب منحصر بفرد دارد.

فرض کنیم که دو پتانسیل φ_1 و φ_2 را بدست آوردیم. (نقض) φ_1 و φ_2 در معادله پواسون صدق می‌کند پس باید $U = \varphi_1 - \varphi_2$ نیز در لاپلاس صدق کند یعنی $\nabla^2 U = 0$

$\varphi_1 : \varphi_2 \qquad U = \varphi_1 - \varphi_2$

حالا فرض کنید شرط مرزی مناسب (1) است.

قضیه گرین : بصورت زیر است.

$$\int_V \left[\varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi)\cdot(\nabla \psi) \right] d^3x = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, da$$

اثبات :

$$\int_V \nabla\cdot A \; dv = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} \qquad ; \quad \vec{A} = \varphi(\vec{\nabla}\psi)$$

A را در انتگرال قرار دهیم ثابت می شود.

$\nabla^2 U = 0$

شرایط مرزی
۱- مقدار روی مرز صفر
۲- مشتق عمودی U روی مرز صفر
۳- ......

φ و ψ در قضیه گرین دو تابع اسکالرند پس هر دو را U

می گیریم ، معادله به شکل زیر در می آید :

$$\int_V \left[U \cancel{\nabla^2 U}^{\,0} + (\vec{\nabla} U)\cdot(\vec{\nabla} U) \right] d^3x = \underbrace{\oint U \frac{\partial U}{\partial n}\, da}$$

همواره روی مرز صفر است . چون در شرایط مرزی صدق می کند.

$$\int_V |\vec{\nabla} U|^2 \; dv = 0 \implies |\vec{\nabla} U| = 0 \implies U = \text{ثابت}$$

پس حداکثر جوابها به اندازه U که یک ثابت است با هم تفاوت دارند که این تفاوتی در مسأله

ایجاد نمی کند پس جواب منحصر بفرد است .

حالا به رابطه (1) بر می گردیم ، این رابطه از ما اطلاعات زیادی می خواهد که با توجه به معادله

پواسون و شرط مرزی متوجه می شویم . پس باید معادله را اصلاح کرد . در تابع گرین φ را

فصل بهاران شد ببین بستان پر از حور و پری
گویی سلیمان بر سپه عرضه نمود انگشتری

گلزار بین گلزار بین در آب نقش یار بین
وان نرگس خمار بین وان غنچه‌های احمری

در جان بلبل گل نگر وز گل به عقل کل نگر

گل عقل غارت می‌کند نسرین اشارت می‌کند
کاینک پس پرده است آن کو می‌کند صورتگری

مولوی

پتانسیل و $\psi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ بگیریم:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

حالا ما تمام توابعی را می‌خواهیم که لاپلاسین آنها برابر $-4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ باشد (که آنها را G آورین) می‌نامیم:

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

در نهایت G را داریم زیرا

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$$

که همواره $\nabla^2 F = 0$ است.

از قضیه گرین شروع می‌کنیم پتانسیل را φ و $\psi = G(\vec{x},\vec{x}')$ بگیریم:

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, G(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(\vec{x}')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\, da' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\, G(\vec{x},\vec{x}')\, da' \quad \text{(II)}$$

حالا یک معادله دیفرانسیل داریم و می‌توانیم G را در شرط مرزی قرار دهیم:

حالت اول:

$$\begin{cases} \nabla^2 G_D(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(x-x') \\ G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0 \quad \text{روی مرز} \end{cases} \xrightarrow{\text{(II)}}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, G_D(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint \varphi(\vec{x}')\frac{\partial G_D(x,x')}{\partial n'}\, da'$$

$G_D(x,x') =$ تابع گرین دیریشله. مسائلی از این نوع را مسائل دیریشله می‌نامیم.

حالت دوم:

$$\begin{cases} \nabla^2 G_N(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ \dfrac{\partial G_N(x,x')}{\partial n'} = 0 \quad \text{روی مرز} \end{cases}$$

گویند مرز نویمن تناقض دارد

$$\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$$

روی جملهٔ انتگرال بیرونی از تعریف دیویژن صحبت می‌کنیم.

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, G_N(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\, G_N(\vec{x},\vec{x}')\, d^2a'$$

$$\frac{1}{S}\oint_S \varphi(x')\, da' = \text{ثابت}$$

$G_N(\vec{x},\vec{x}') =$ تابع گرین نویمن

حالت سوم: مخلوط

$\dfrac{1}{|x-x'|}$ تابع گرین فضای بی‌نهایت است.

قضیه: $G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}',\vec{x})$ یعنی G نسبت به $\vec{x}$ و $\vec{x}'$ متقارن است.

اثبات:

از قضیهٔ گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\, d^3y = \oint_S \left[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] da$$

$\varphi = G_D(x,y)$, $\psi = G_D(x',y)$ ، G_D روی مرز صفر

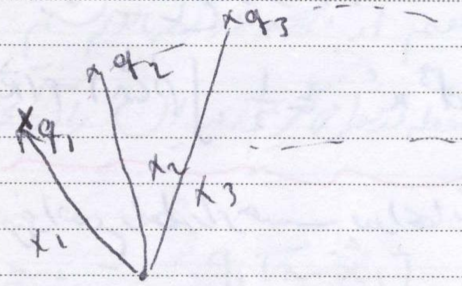
۱۲ --- ۷۵ --- ۱۰۰۰۰

$$\int \left[G_D(\vec{x},\vec{y})\, \nabla^2 G_D(\vec{x}',\vec{y}) + G_D(\vec{x}',\vec{y})\, 4\pi \delta(\vec{x}-\vec{y}) \right] d^3y = 0$$

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = G_D(\vec{x}',\vec{x})$$

جلسه چهارم شنبه ۲۳ مهرماه ۱۳۸۴

انرژی پتانسیل الکترواستاتیک:



انرژی این توزیع بار چقدر است. یعنی چقدر انرژی صرف شده تا این بارها در کنار هم قرار گیرند.

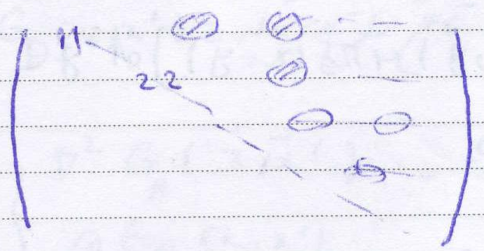
بارها از بی‌نهایت به نقاط مورد نظر آورده‌ایم:

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = q_2 \left(\frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \right)$$

$$W_3 = q_3 \left\{ \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \frac{q_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|} \right\}$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots = 0 + \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \left[\frac{q_1 q_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|} \right] + \cdots$$



$$= \frac{1}{2}\sum_i \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

انرژی پتانسیل الکترواستاتیک:

$$u = \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j) \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2)$$

برای یک توزیع پیوسته:

$$u = \frac{1}{2}\int \frac{\rho(\vec{x})\,\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x\, d^3x' = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\, d^3x \quad (3)$$

می‌خواهیم رابطه را برحسب میدان‌ها بنویسیم:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\, d^3x \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{x}) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{8\pi}\int \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,\varphi(\vec{x})\, d^3x$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{E}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\varphi + \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)$$

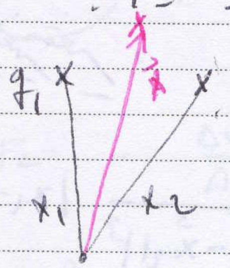
$$= \frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{E})\, d^3x}_{\to 0} - \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\, d^3x$$

$\oint \varphi\vec{E}\cdot d\vec{s}$ چون سطح بینهایت است
روی کل فضا انتگرال سطح صفر است
$\varphi\vec{E} = 0$ است

یوسف کنعانیم روی چو ماهم گواست
هیچ کس از آفتاب خط و گواهی نخواست
ای گل و گلزارها، کیست گواه شما
رنگ که در چشمهاست، بوی که در مغزهاست
(مولانا)

$$u = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, d^3x \quad \text{(III)}$$

سوال: دو بار نقطه ای در نظر بگیرید بصورت زیر (مختلف العلامه) انرژی این سیستم چقدر است؟



$$u = \cancel{\tfrac{1}{2}}\ \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} < 0$$

عبارات (II) و (III) انرژی برهمکنش و خود انرژی سیستم است.

جمله (I) تنها انرژی برهمکنش است. حالا می خواهیم از (III) به رابطه بالا برسیم. باید جملات را اصلاح کنیم، خود انرژی ها را حذف کنیم. یک نقطه در نظر بگیریم و میدان را در آنجا بدست آوریم:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q_1(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$

$$E^2 = \vec{E}\cdot\vec{E}$$

$$= \underbrace{\frac{q_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^4}}_{\text{self Energy}} + \frac{2q_1q_2\,(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|x-x_1|^3\,|x-x_2|^3}$$

برهمکنش متقابل V

$$V = \frac{1}{8\pi}\int \frac{2q_1q_2\,(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3\,|x-x_2|^3}\, d^3x$$

جواب انتگرال همان رابطه بالاست که <0 است.

حالا این انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \int \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3 \, |\vec{x}-\vec{x}_2|^3} d^3x$$

$$\vec{x}-\vec{x}_2 = |\vec{x}_1-\vec{x}_2|\vec{\rho} + (\vec{x}_1-\vec{x}_2)$$

$$\vec{x}-\vec{x}_1 = \vec{\rho}\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|$$

$$\vec{\rho} = \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} - \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

تغییر متغیر

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \int \frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|\vec{\rho}\cdot\left[|\vec{x}_1-\vec{x}_2|\vec{\rho} + (\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right]}{|x_1-x_2|^3 \rho^3 \, \left||x_1-x_2|\vec{\rho} + (\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right|^3} |\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3 d^3\rho$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \int \frac{\vec{\rho}\cdot(\vec{\rho}+\hat{n})}{\rho^3 \, |\vec{\rho}+\hat{n}|^3} d^3\rho$$

$$I = \int \frac{\vec{\rho}\cdot(\vec{\rho}+\hat{n})}{\rho^3 \, |\vec{\rho}+\hat{n}|^3} d^3\rho = \int \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\cdot\nabla_\rho \frac{1}{|\vec{\rho}+\hat{n}|} d^3\rho$$

$$\frac{\vec{\rho}+\hat{n}}{|\vec{\rho}+\hat{n}|^3} = -\nabla_\rho \frac{1}{|\vec{\rho}+\hat{n}|}$$

$$\nabla\cdot(\vec{F}\varphi) = (\nabla\cdot F)\varphi + \vec{F}\cdot\nabla\varphi$$

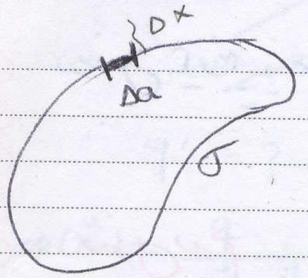
به انتگرال سطح تبدیل می‌شود

$$I = \int \left(\nabla_\rho\cdot\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\right) \underbrace{\frac{1}{|\vec{\rho}+\hat{n}|}}_{\text{واحد}} d^3\rho = 4\pi$$

$4\pi\delta(\rho)$ جای ρ صفر بگذارید

پس این انتگرال تبدیل به رابطه I شد با از بین رفتن جمله خودانرژی

نیروی وارد بر واحد سطح یک هادی با چگالی بار سطحی σ چقدر است؟



یک جابجایی مجازی به اندازه Δx در نظر می‌گیرم. حال این جابجایی در انرژی سیستم تغییر ایجاد می‌کند.

انرژی در واحد حجم

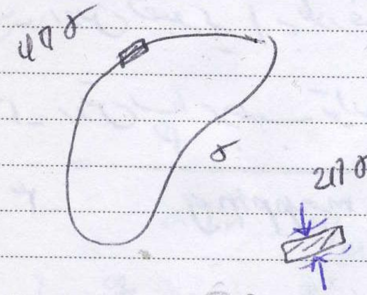
$$\Delta U = (\underbrace{\Delta x\, \Delta a}_{\text{حجم}}\ 16\pi^2\sigma^2)\ \frac{1}{8\pi}$$

$\vec{E} = 4\pi\sigma$ میدان درون رسانا

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = 2\pi\sigma^2\Delta a$$

$$f_{\text{در واحد سطح}} = \frac{F}{\Delta a} = 2\pi\sigma^2$$

و راه حل دیگر:



$$\oint E = E_{\text{درون}} + E_{\text{خارجی}}$$

$$4\pi\sigma = 2\pi\sigma + E_{\text{خارجی}}$$

$$E = 2\pi\sigma$$

$F = qE$

$$F = \sigma\Delta a\, 2\pi\sigma \Rightarrow \frac{F}{\Delta a} = 2\pi\sigma^2$$

جلسه پنجم یکشنبه ۲۴ اردیبهشت ۱۳۸۴

خلاصه مطالب فصل اول:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, G(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\vec{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}\, da'$$

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ G(\vec{x},\vec{x}') = 0 \quad \text{روی مرز} \end{cases}$$

در فصل ۱ دیدیم به دنبال پیدا کردن تابع گرین هستیم.

فصل دوم

حل مسائل الکترواستاتیک

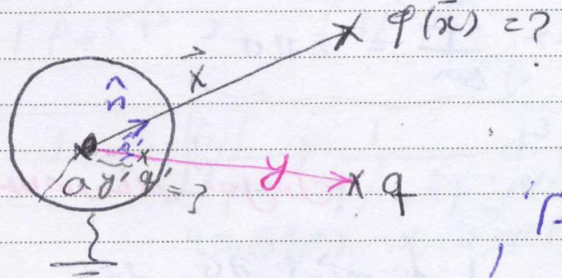
مسائل به سه روش زیر حل می‌شوند:

۱- روش تصویر (به طور غیر مستقیم به محاسبه تابع گرین برای برخی از هندسه‌ها)

۲- روش بسط برحسب توابع ویژه (روش کلی محاسبه تابع گرین)

۳- conformal mapping حل در حالت دو بعدی

۱- روش تصویر:



برای کره، مسأله خارجی (پتانسیل بیرون)

بدون روش تصویر بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -4\pi q\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ \varphi(\vec{x}) = 0 \quad \text{روی سطح کره} \end{cases}$$

توزیع q

حل این روش مشکل است. از روش تصویر استفاده می‌کنیم.

بار تصویر حتما باید داخل کره باشد تا سمت راست معادله پواسون تغییر نکند.

$q' = ?\qquad y' = ?$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}'|}$$

$x=y'$ نمی‌شود چون

بیرون کره که ناحیه ما است

جواب مجهول

$$\nabla^2\phi = -4\pi\,\delta(x-y) + 4\pi\,\delta(x-y')$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|x\hat{n}-y\hat{n}'|} + \frac{q'}{|x\hat{n}-y'\hat{n}'|}$$

روی سطح کره

$$\phi(x=a) = \frac{q}{|a\hat{n}-y\hat{n}'|} + \frac{q'}{|a\hat{n}-y'\hat{n}'|} = 0$$

$$= \frac{q}{a\,|\hat{n}-\frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'\,|\hat{n}'-\frac{a}{y'}\hat{n}|} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{a} = -\dfrac{q'}{y'} \\ y/a = a/y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q' = -\frac{a}{y}\,q \\ y' = \dfrac{a^2}{y} \end{cases}$$

$$|\hat{n} - \alpha\hat{n}'|^2 = (\hat{n}-\alpha\hat{n}')\cdot(\hat{n}-\alpha\hat{n}') = 1+\alpha^2 - 2\alpha\,\hat{n}\cdot\hat{n}'$$

$$|\hat{n}' - \alpha\hat{n}|^2 = 1+\alpha^2 - 2\alpha\,\hat{n}\cdot\hat{n}'$$

در مسئله روش تصویر باید به چند سؤال زیر پاسخ دهید:

۱- چگالی سطحی بار روی کره چقدر است؟